FÄCHERÜBERGREIFENDER UNTERRICHT MATHEMATIK – PHYSIK: Erfahrungen aus einem 4-jährigen Unterrichtsversuch

Gerald STACHL
BRG Wr. Neustadt - Gröhrmühlgasse

1 Realgymnasium mit naturwissenschaftlichem Schwerpunkt:

Die vorliegende Untersuchung wurde am BRG Wr. Neustadt, Gröhrmühlgasse durchgeführt, wo seit 1991 neben der Standardform „Realgymnasium" noch der Zweig „Realgymnasium mit naturwissenschaftlichem Schwerpunkt" geführt wird. Die folgende Tabelle zeigt die Unterschiede im Vergleich der beiden Schulformen. Die genauen Stundentafeln können über die Homepage der Schule (http://www.brg-wrn.ac.at/gesch/tafeln.htm) nachgeschlagen werden.

KLASSE:	3		4		5		6		7		8	
Mathematik	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3
Physik	4	2	3	2	3	2	3	3	3	2	2	2
GZ	0	1	0	1	-	-	-	-	-	-	-	-
Informatik	0	1	0	1	2	2	-	-	-	-	-	-
Leibesübungen	3	4	3	3	2	3	2	3	2	2	2	2
Werken	0	2	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-
Biologie	3	2	3	2	3	2	3,5	3	2	0	2	2
Chemie	2	0	2	2	-	-	3	0	3	3	2	2

Tabelle 1

In der linken Spalte stehen jeweils die Werte für die Sonderform, in der rechten Spalte jeder Klasse die Werte für die Standardform. Die Änderungen aus Sicht der Mathematik oder der Naturwissenschaften sind grau unterlegt. Die Standardform des Realgymnasiums wurde im letzten Jahr schulautonom durch Einführung des Pflichtgegenstandes Informatik ab der 3. Klasse ebenfalls geringfügig verändert. Eine weitere Veränderung, die in dieser Tabelle nicht ersichtlich ist, betrifft den Unterricht aus Bildnerischer Erziehung und aus Musikerziehung. Diese beiden Fächer werden in der Schwerpunktform bereits ab der 6. Klasse alternativ geführt. Der Schwerpunkt Naturwissenschaft ist auch in der Reifeprüfung dieser Schulform erkennbar. Die Absolventen müssen in mindestens einem naturwissenschaftlichen Fach (Bologie, Chemie, Physik) eine mündliche Prüfung ablegen (dies muss jedoch nicht die Schwerpunktprüfung sein) und haben überdies die Möglichkeit eine Schwerpunktprüfung in einer Naturwissenschaft im Zusammenhang mit den Laborübungen abzulegen (Aufgabenstellung mit praktischer Arbeit)
Aus dem Ansatz des Naturwissenschaftlichen Realgymnasiums ergeben sich speziell für das Fach Mathematik 2 Forderungen:

1.1 Mathematik als Servicefach:

Im Rahmen der Laborübungen werden zur Auswertung und Interpretation der Versuchsreihen vor allem elementare Kenntnisse aus der Statistik (Mittelwerte, Abweichungsmaße), Fertigkeiten im Interpretieren und Erstellen von Graphen und Fähigkeiten im Formulieren von Zusammenhängen (im Allgemeinen: Proportionen) benötigt. Weiters werden vor allem in der Oberstufe das sichere Umrechnen von Maßeinheiten und das Rechnen (bzw. Abschätzen) von Ergebnissen mit Hilfe der Zehnerpotenzschreibweise zu notwendigen Grundfertigkeiten.
Neben der Mathematik ist vor allem die Informatik ein wichtiges Servicefach für diese Schulform geworden, da die Schüler ihre Laborübungen in geeigneter (schriftlicher) Form dokumentieren müssen.

1.2 Behandlung anwendungsorientierter Aufgaben:

Diese Forderung betrifft den Mathematikunterricht in allen Klassen dieser Schulform, insbesondere jedoch den Unterricht in der 8. Klasse, da die zusätzliche Mathematikstunde (im Vergleich zum „normalen" Realgymnasium) mit der Auflage versehen wurde, anwendungsorientierte Aufgaben zu behandeln.

Der Unterricht fand in einer Klasse mit 13 Schülern statt (in der 5. Klasse wurde die Gruppe noch gemeinsam mit Schülern der Standardform unterrichtet ⇔ schulformübergreifende Klassenbildung). Die Unterrichtform der 5. Klasse hatte sicherlich einige Nachteile, da einige Ideen des fächerübergreifenden Unterrichtes mit Einbezug der Möglichkeiten des Laborunterrichtes nur eingeschränkt umsetzbar waren.

2 Zielsetzung des Unterrichtsversuches:

- **Motivation:** Ich habe mir von Beispielen, die bekannte Problemstellungen aus der Physik zum Inhalt haben, oder sogar die direkte Fortsetzung von soeben behandelten Fragestellungen aus Physik oder Physik-Labor darstellen eine erhöhte Motivation erwartet sich mit neuen mathematischen Begriffen zu beschäftigen. In einem gewissen Rahmen habe ich mir durch die Physik auch Unterstützung in der Frage nach dem Sinn der Mathematik erwartet, wenngleich eine Begründung der Mathematik nur aus der Anwendung heraus nicht erfolgreich sein kann[1].
- **Vernetzung:** Durch das Anwenden der Mathematik wird das mathematische Wissen mit dem Wissen anderer Fächer, in diesem Fall Physik, vernetzt. Allerdings lässt sich aus diesem Ziel ableiten, dass eine Vernetzung nur mit der Physik nicht ausreichend sein wird, sondern eine Verbindung zu möglichst vielen Fächern wünschenswert ist.
- **Wechselseitige Ergänzung der Fächer** (unter Einbeziehung der Informatik in der 5. Klasse): In manchen Bereichen (siehe Unterricht 5. Klasse) ist es teilweise möglich, dass die Anwendungen dem aktuellen physikalischen Thema entstammen und die Lösung der Anwendungsaufgaben wieder neue physikalische Erkenntnisse zulässt. Dadurch kann teilweise ein verschränkter Unterricht der beiden Fächer entstehen.
- **Modellbilden:** Durch eine stärkere Betonung von Anwendungsproblemen im Mathematikunterricht liegt bei geeigneter Wahl der Aufgabenstellung auch eine größere Bedeutung im Modellbilden. Unter geeigneter Aufgabenstellung verstehe ich hier eine Problemstellung, die eine nachfolgende Modellbildung durch den Schüler benötigt. Im Gegensatz dazu würde ich „eingekleidete Aufgaben" sehen, in denen die Modellbildung in der Angabe größtenteils bereits vorweggenommen wurde. Diese Art von Problemstellung würde ich nicht prinzipiell ablehnen, da man nicht übersehen darf, dass der Prozess des Modellierens den Schülern große Schwierigkeiten bereitet. Daher sind meines Erachtens „eingekleidete Aufgaben" für den Einstieg in anwendungsorientierte Mathematik sehr wertvoll. Die Schüler sollten anschließend jedoch immer weiter in den Modellbildungsprozess eingebunden werden.

3 Die Rolle des Computers:

Der Computer wurde während dieser Untersuchung fallweise eingesetzt, wobei überwiegend Excel als Tabellenkalkulation und Derive als Computeralgebrasystem zum Einsatz kamen.
Die Bedeutung des Rechners lag in 2 Bereichen:

- Möglichkeit mit realistischeren Werten zu rechnen (vgl. 4.3.3)
- Zeitgewinn in Anwendungssituationen → Konzentration auf das Wesentliche
  Damit meine ich Situationen, in denen etwa das Lösen eines Gleichungssystems nicht im Vordergrund steht und im Sinne des WhiteBox-BlackBox Prinzips an ein CAS[2] übergeben werden kann

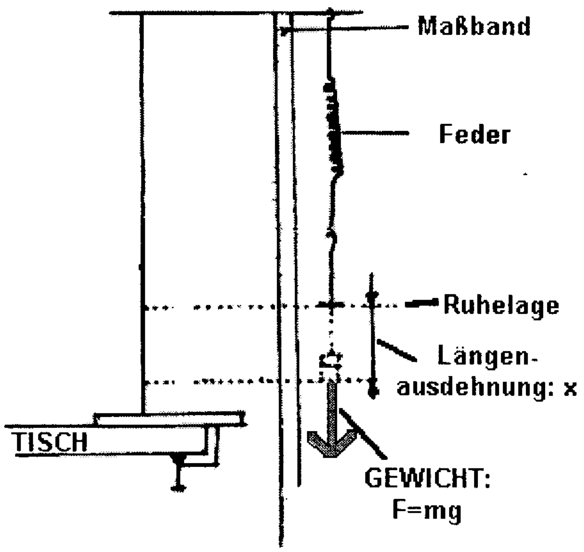
4 Unterrichtsbeispiele:

4.1 Funktionenlehre der 5. Klasse – Bewegungslehre in Physik (lin. Bewegungen)

Als Einstieg in die Funktionenlehre der 5. Klasse wurden Zusammenhänge von Daten betrachtet, die die Schüler selbst bei Messungen in den Physik-Laborübungen ermittelt hatten. In diesen Beispielen können immer wieder auch grundlegende Prinzipien des Modellbildens wie etwa .... thematisiert werden. Untersucht man etwa den Zusammenhang zwischen der

[1] Siehe W. Heymann
[2] CAS: Computeralgebrasystem

Dehnung einer Schraubfeder und der daran befestigten Last, so erhalten wir (Auszug aus einem Laborprotokoll eines Schülers):

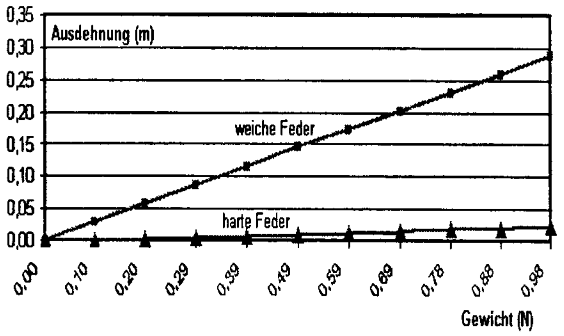


g: Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche

$g=9{,}81\ m/s^2$

Wir untersuchen eine <u>weiche</u> und eine <u>harte Feder:</u>

	weiche Feder	harte Feder
[F]=N	$[x_1]$=m	$[x_2]$=m
0,000	0,000	0,000
0,098	0,028	0,001
0,196	0,057	0,003
0,294	0,086	0,005
0,392	0,115	0,006
0,490	0,145	0,010
0,588	0,173	0,013
0,686	0,203	0,015
0,784	0,231	0,018
0,882	0,259	0,020
0,980	0,289	0,024
0,784	0,235	0,018
0,588	0,174	0,012
0,392	0,115	0,006
0,196	0,058	0,002

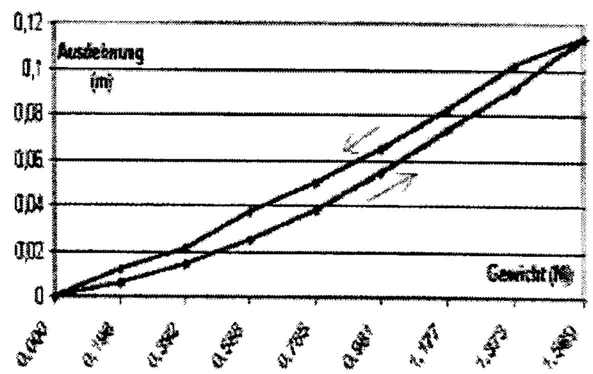


Diese Daten können nun verwendet werden um den Zusammenhang zwischen Kraft und Dehnung in Termform zu beschreiben. Um die „beste“ Darstellung (im Sinne der Minimierung der quadratischen Abweichung) des vermuteten linearen Zusammenhanges zwischen den Beobachtungsgrößen zu finden kann etwa die FIT-Funktion von Derive als Black-Box verwendet werden.

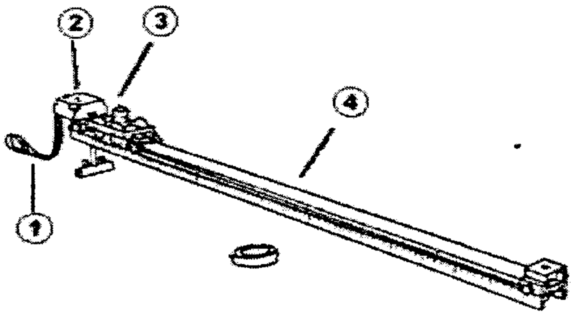
Andere lineare Zusammenhänge aus der Physik erhält man bei der Untersuchung von unbeschleunigten Bewegungen, wobei deren experimenteller Aufbau durch die Notwendigkeit Reibungskräfte nahezu ausschalten zu müssen, relativ kompliziert wird.

Auch nicht-funktionale Zusammenhänge können physikalisch motiviert werden, wenn man etwa das Kraft-Dehnungsdiagramm eines Gummiringes betrachtet:

Diese Untersuchung könnte als Motivation dienen auch Relationen in geringem Umfang als Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes zu behandeln.



Nach einer eingehenden Beschäftigung mit linearen Funktionen, wobei etwa auch die physikalische Bedeutung der Parameter k,d für Bewegungsaufgaben behandelt wird, werden in Physik nun auch beschleunigte Vorgänge untersucht. Der nun folgende Auszug aus einem Laborprotokoll eines Schülers zeigt den Aufbau der Messung sowie einige Ergebnisse und Analysen:

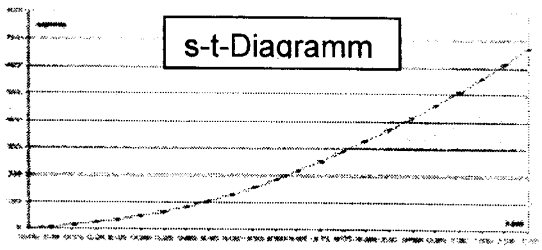


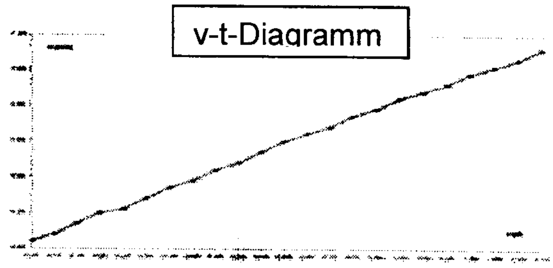
1) Papierband (am Wagen befestigt)
2) Zeitmarkengeber
3) Wagen (mit Massestücken beschwert)
4) Schiene

Der Zeitmarkengeber versieht das Papierband, das am Wagen befestigt ist, alle 10 Millisekunden mit einem Punkt.

Δ t=10ms (100 Punkte/s)
Zusammenfassen von jeweils 5 Punkten --> Δ t=0,05s

Δ s (mm)	Δ t (s)	s (mm)	t (s)	Δ v (m/s)	Δ a (m/s²)
2	0,05	2	0,05	0,04	0,80
4	0,05	6	0,10	0,08	0,80
7	0,05	13	0,15	0,14	0,93
10	0,05	23	0,20	0,20	1,00
11	0,05	34	0,25	0,22	0,88
14	0,05	48	0,30	0,28	0,93
17	0,05	65	0,35	0,34	0,97
19	0,05	84	0,40	0,38	0,95
22	0,05	106	0,45	0,44	0,98
24	0,05	130	0,50	0,48	0,96
27	0,05	157	0,55	0,54	0,98
30	0,05	187	0,60	0,60	1,00
32	0,05	219	0,65	0,64	0,98
34	0,05	253	0,70	0,68	0,97
......	....	....	....	....	....





Bei der Untersuchung von quadratischen Funktionen kann nun auf dieses Beispiel zurückgegriffen werden. Weitere Erkenntnisse kann man etwa aus der Betrachtung des vertikalen Wurfes betrachten, da in diesem Fall eine nach oben orientierte gleichförmige Bewegung (durch die Abwurfgeschwindigkeit) überlagert wird mit einer nach unten gerichteten gleichmäßig beschleunigten Bewegung.
Hier können Ziele wie das Erkennen der richtigen Zuordnung zwischen Funktionsterm und Graph, Monotonieeigenschaften mit Anwendungssituationen verknüpft werden.
Eine weitergehende Analyse der gleichmäßig beschleunigten Bewegung kann die Schüler bereits auf wichtige Zusammenhänge zwischen den Bewegungsdiagrammen hinweisen. Zunächst qualitativ, aber auch quantitativ kann etwa herausgearbeitet werden, dass die Steigung im s-t-Diagramm an einer Stelle t_0 dem Wert der Geschwindigkeitsfunktion v(t) an der Stelle t_0 entspricht. (Vorbereitung des Ableitungsbegriffes) Ebenso kann über die stückweise Annäherung der Bewegung durch gleichförmige Bewegungsabschnitte ($\Delta s = v^*\Delta t$) der zurückgelegte Weg als Flächeninhalt und der Kurve v(t) gedeutet werden (Vorbereitung des Integralbegriffes)

4.2 Beispiele zur Integralrechnung

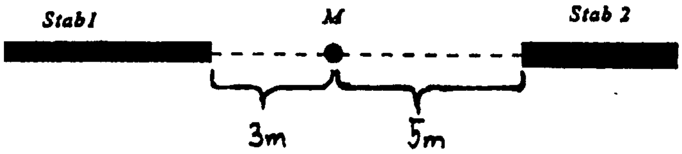
Neben den klassischen Anwendungen der Integralrechnung in der Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten bietet die Physik ein weites Anwendungsfeld für Integrale: z.B.:

Zurückgelegter Weg: $s(t)=\int_0^t v(u)du$ v(u): Geschwindigkeitsfunktion

Geschwindigkeit: $v(t)=\int_0^t a(u)du$ a(u): Beschleunigungsfunktion

Arbeit: $W=\int_{s1}^{s2} F(s)ds$ F(s): ortsabhängige Kraft

Berechnung von physikalischen Größen für ausgedehnte Körper (wenn die Reduktion des Körpers auf den materiellen Punkt nicht zulässig ist).
Beispiel:
Eine Masse M (10kg) wird von 2 Stäben angezogen. Berechne mit Hilfe der Integralrechnung die beiden Kräfte F1 bzw. F2 der beiden Stäbe auf die Masse M. Analysiere anschließend die erhaltenen Ergebnisse. Welche Bewegung wird die (zuvor ruhende) Masse M durchführen ?



Hinweis: Ignoriere bei der Berechnung von F1 die Existenz von Stab 2 und umgekehrt.

Daten:

Stab 1:	Stab 2:
Länge: 6m	Länge: 4m
m1 : 30kg	m2 : 44kg
Abstand zu M: 3m	Abstand zu M: 5m

$$dF=G*\frac{M*dm}{r^2}$$

G = 6,67 * 10^{-11} $m^3kg^{-1}s^{-2}$Die Kraft des Stabes 2 auf die Masse kann z.B. mit folgendem Integral bestimmt werden:

$$F_2=\int_5^9 G*\frac{10*\frac{44}{4}dx}{x^2}.$$

Dieses Beispiel (entnommen einer Schularbeitsangabe) wurde noch mit einer Zusatzfrage versehen. Diese Zusatzfragen sind nicht direkter Teil einer Schularbeitsaufgabe und meistens auch als offene Aufgabenstellungen formuliert. Bei zufrieden stellender (Teil-) Behandlung dieser Aufgabe können sich die Schüler Punkte erarbeiten, die im Standardteil der Prüfung vorkommende Fehler teilweise kompensieren können. Im Schwierigkeitsgrad sind diese Aufgaben allerdings höher als alle anderen Beispiele einzuordnen und erfordern ein Anwenden der Kenntnisse auf völlig neue Situationen, die nicht in anderen Übungsaufgaben bereits vorweggenommen wurden.

> *<u>ZUSATZ:</u> Welche Ergebnisse hätte man durch Verwendung des Modells des materiellen Punktes auf die Stäbe im Bsp. 3 erhalten. Wann kann dieses Modell nur sinnvoll eingesetzt werden?*

Bei dieser Aufgabe gab es teilweise bemerkenswerte Ergebnisse. Ein Schüler hat hier eine etwa 3 Seiten lange Abhandlung geliefert. Die folgende Abbildung stellt den letzten Teil seiner

Überlegungen dar. (weitere Ergebnisse findet man unter http://sta.brg-wrn.ac.at/tagung oemg.htm)

die Genauigkeit der Näherung abzuschätzen:
Als Maß ist sicherlich das Verhältnis der Kräfte $\frac{F_{genau}}{F_{Näherung}}$ sinnvoll.

$$\frac{F_{genau}}{F_{Näherung}} = \frac{\int_{r_0}^{r_0+l} \frac{G \cdot M \cdot dm}{r^2}}{\frac{\cancel{G \cdot M}}{r_s^2} M_{stab}} =$$

r_0 ... Abstand
l ... Stablänge
r_s ... Abstand zum Schwerpunkt

$$= \frac{\int_{r_0}^{r_0+l} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\cancel{M_{stab}}}{l} \cdot dr}{\frac{\cancel{M_{stab}}}{r_s^2}} =$$

$$r_s = r_0 + \frac{l}{2}$$

$$= \frac{r_s^2}{l} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_0}^{r_0+l} =$$

$$= \frac{r_s^2}{l} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+l}\right)$$

=> Welcher Wert wäre wünschenswert, damit mit der Näherung gearbeitet werden kann?

Der Schüler beweist hier bereits einen sicheren Umgang mit dem Integralbegriff und ist auch in der Lage mit Hilfe von Integralen neue Begriffe (Genauigkeitsmaß) zu formulieren.
Eine ähnliche Anwendungsmöglichkeit bietet das Berechnen des Trägheitsmoment $I=mr^2$ von Körpern.
An dieser Stelle wurde auch ein kurzer Ausblick auf Mehrfachintegrale gewagt, wenngleich hier der Ansatz (Aufsummieren in 2 bzw. 3 Dimensionen) und nicht die Berechnung selbst im Vordergrund stand. Der Einsatz des Computers bot hier die Möglichkeit auch bei Mehrfachintegralen zu Ergebnissen zu kommen.

4.3 Differentialgleichungen

Aufgabenstellung:
Simuliere den Fallschirmsprung aus einer Höhe von 2000m, wobei in einer Höhe von 500m der Fallschirm geöffnet werden soll. Bestimme die Zeit und die Geschwindigkeit beim Öffnen des Fallschirms und beim Aufsprung.

Diese Aufgabe wurde bereits in der 5. Klasse unter Einbezug des Pflichtgegenstandes Informatik behandelt. Dazu wird aus dem 3. Newton'schen Axiom unter Verwendung des Newton-Ansatzes für die Reibungskraft die folgende Bewegungsgleichung abgeleitet:

$$m*a=\frac{c_w\rho A v^2}{2}-m*g$$

Unter Verwendung des Systems

$s_0 = 2000m$ $v_0 = 0m/s$ $a_0 = -10m/s^2$

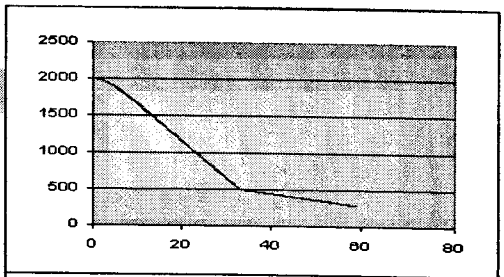
$a_{neu} = \frac{c_w\rho A {v_{alt}}^2}{2*m}-g$ $v_{neu} = v_{alt} + a_{alt}*\Delta t$ $s_{neu} = s_{alt} + v_{alt}*\Delta t$

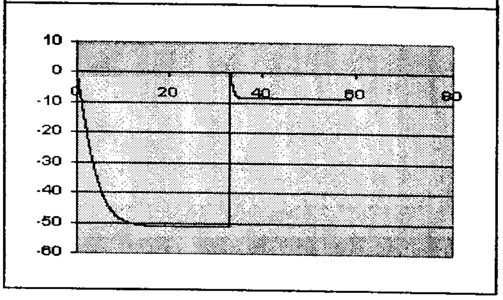
kann das System nun z.B. mit einer Tabellenkalkulation wie Excel simuliert werden. Damit kann man die Fragestellungen beantworten. Durch Variation der Parameter Δt, m, A, c_w und Öffnungshöhe können ähnliche Fragestellungen betrachtet, beziehungsweise der Einfluss des Zeitschrittes Δt auf die Lösung untersucht werden.

Freier Fall mit Luftreibung

ohne SCHIRM:			Mit SCHIRM		
cw1:	1		cw2:	1,3	
A1:	0,5	m²	A2:	14,85	m²
ρ:	1,2	kg/m³			
Δt	0,06	s	S0:	2000	m
g:	-9,81	m/s²	V0:	0	m/s
m:	80	kg	Öffnungshöhe:	**500**	**m**

t	s	v	a
0	2000	0	-9,81
0,06	2000	-0,5886	-9,81
0,12	1999,96468	-1,1772	-9,808700813
0,18	1999,89405	-1,765722	-9,804803251
0,24	1999,78811	-2,35401	-9,798308346
0,3	1999,64687	-2,941909	-9,789219884
0,36	1999,47035	-3,529262	-9,777544399
0,42	1999,2586	-4,115915	-9,763291163
0,48	1999,01164	-4,701712	-9,746472176





Neben einer Analyse der Graphen (man kann erkennen, **dass ein Großteil der Bewegung** nahezu gleichförmig erfolgt), können auch Modellgrenzen und eventuell Modellfehler besprochen werden. Bei genauerer Analyse zeigt sich, dass in dem soeben verwendeten Simulationsmodell ein Fehler im Ansatz der Bewegungsgleichung steckt. Das System liefert nur dann richtige Werte für die Beschleunigung, wenn die Richtung des Geschwindigkeitsvektors zur Erdoberfläche zeigt (dies bedeutet in unserem Orientierungssystem ein negatives Vorzeichen der Geschwindigkeit). Ersetzt man im 1. Modell die Gleichung für die Beschleunigung durch $a_{neu} = -\frac{c_w\rho A v_{alt} ABS(v_{alt})}{2*m}-g$ so liefert das Modell nun auch für positive (nach oben gerichtete) Geschwindigkeiten richtige Werte.

In der 8. Klasse kann diese Aufgabenstellung von einem anderen Standpunkt aus neu analysiert werden. Im vorliegenden Fall wurden zunächst einfache Differentialgleichungen ohne Computereinsatz durchgenommen. Als Methoden wurden die Trennung der Variablen und der Exponentialansatz bei Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten behandelt. Die nun folgenden Aufgabenstellungen bieten einen Überblick über den Aufbau dieses Kapitels:

4.3.1 Die Gleichung des radioaktiven Zerfalles:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda * N(t)$$

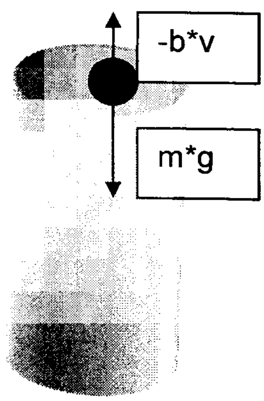
Nach einer allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (Trennung der Variablen) werden verschiedene Fragestellungen aus der Praxis behandelt (Bestimmung der Halbwertszeit, Berechnung von Zeiten, bei denen die radioaktive Menge unter einen bestimmten Wert gesunken ist, C-14 Methode bei der Altersbestimmung,...), wobei hier eher die Manipulation der Exponentialfunktion und nicht die Differentialgleichung selbst im Vordergrund steht.
Die theoretischen Vorhersagen konnten in unserer Schulform mit, von den Schülern selbst ermittelten, Messserien verglichen werden (siehe http://www.brg-wrn.ac.at/schwerp/physik_l.htm)
Weitere Anwendungen dieser Differentialgleichung wären etwa die Abschwächung der Lichtintensität beim Eintritt in Glas, der Stromfluss beim Entladen eines Kondensators sowie die Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit ohne Einfluss der Schwerkraft (vgl. 4.3.2).

4.3.2 Senkrechte Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit:

Bewegt sich ein Körper in einer Flüssigkeit so kann die Reibungskraft (bei niedrigen Geschwindigkeiten) proportional zur Geschwindigkeit angesetzt werden (Stokes Reibung):

$$m * \frac{d^2s}{dt^2} = -b * \frac{ds}{dt} + m * g$$

Ersetzt man nun die Ableitung der Ortsfunktion s(t) durch die Geschwindigkeitsfunktion v(t) so erhält man eine Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.



$$m * \frac{dv}{dt} = -b * v + m * g$$

für eine Kugel gilt: b= 6 π r η mit

η .... Viskosität der Flüssigkeit (z.B: η=1,47 Pa s : Glycerin)

r.....Radius der Kugel

Nach einer Analyse der Geschwindigkeitsfunktion (Frage nach Grenzgeschwindigkeit) kann nun auch die Ortsfunktion s(t) durch Integration von v(t) bestimmt werden:

$$s(t) = \int_0^t v(x)\, dx$$

4.3.3 Bewegung eines Körpers in der Luft: (hohe Geschwindigkeiten)

Bei hohen Geschwindigkeiten (vgl. Mende/Simon S 100ff) ist die Reibungskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Eine Beschreibung der Bewegung erfolgt damit durch folgende Differentialgleichung:

$$m * \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{c_w\, \rho\, A (\frac{ds}{dt})^2}{2} - m * g$$

mit c_w...Widerstandsbeiwert (formabhängig) : c_w~ 1,2 (rechteckige Platte)

ρ.... Dichte (z.B. der Luft)

A....Inhalt der Querschnittsfläche (normal zur Strömungsrichtung)

g.....Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche (g ~ 9,81 m/s²)

Betrachtet man wie in 4.3.2 die Bewegung abhängig von der Geschwindigkeitsfunktion v(t) so erhält man abermals eine Differentialgleichung 1. Ordnung. Beim Lösungsansatz durch Trennung der Variablen erhält man jedoch ein Integral, bei dem eine Partialbruchzerlegung notwendig ist. Aus diesem Grund ist es bei der Wahl konkreter Zahlenwerte notwendig darauf zu achten, dass die zu behandelnden Terme einfache Zahlenwerte aufweisen und trotzdem einigermaßen realistische Werte verwendet werden. Eine allgemeine Überlegung zeigt:

$$m*\frac{dv}{dt}=\frac{c_w\,\rho\,A\,v^2}{2}-m*g$$

→Trennung der Variablen:

$$\frac{dv}{\frac{c_w\,\rho\,A\,v^2}{2m}-g}=dt$$

→ Integration:

$$\int\frac{dv}{\frac{c_w\,\rho\,A\,v^2}{2m}-g}=\int dt+C$$

wählt man hier für die Parameter: $c_w=1$ (~Zylinderform), $g\sim10m/s^2$, $\rho=1kg/m^3$ (Luft:$1{,}3kg/m^3$), $A=10m^2$ und $m=50kg$ so vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\int\frac{dv}{0{,}1v^2-10}=\int dt+C$$

bzw.

$$\int\frac{dv}{v^2-100}=10\int dt+10C$$

eine Partialbruchzerlegung auf der linken Seite der Gleichung führt zu

$$\frac{1}{20}*(\int\frac{dv}{v-10}-\int\frac{dv}{v+10})=10\int dt+10C$$

bzw. nach erfolgter Integration

$$\ln(v-10)-\ln(v+10)=200t+200C$$

über die Zwischenstufe

$$\frac{v-10}{v+10}=e^{200t+200C}$$

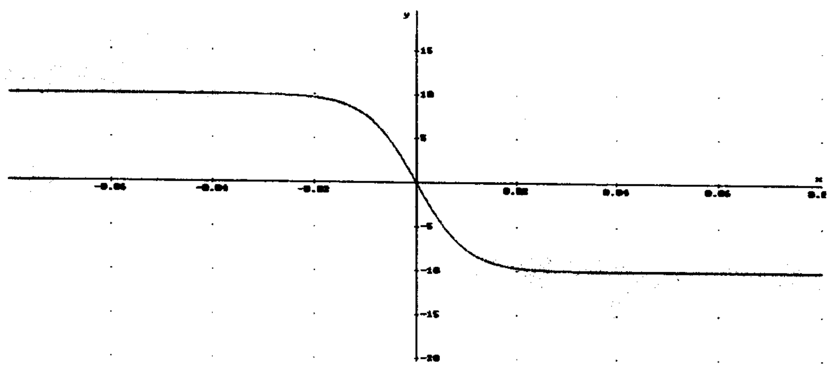
kommt man zur Lösung v(t)

$$v(t)=\frac{10(1+e^{200t+200C})}{1-e^{200t+200C}}$$

Um nun zu einer konkreten Lösung der Differentialgleichung zu kommen, benötigen wir noch die Angabe eines Anfangswertes, z.B. v(0)=0. Daraus kann man den Wert für c bzw. besser für e^{200c} bestimmen. Besonders einfach wird diese Bestimmungsaufgabe, wenn man dafür die implizite Gleichung für v verwendet:

$\frac{v-10}{v+10}=e^{200t+200C}$ liefert für t=0 und v=0 das Ergebnis $e^{200c}=-1$. Damit erhalten wir die

Lösungsfunktion $v(t)=\frac{10(1-e^{200t})}{1+e^{200t}}$ mit folgendem Graphen:



Hier kann man nun auch die Gültigkeitsgrenzen des mathematischen Modells thematisieren. Dass im gültigen Bereich die Geschwindigkeitsfunktion negativ ist, entspricht unserem Orientierungssystem (das wir der Differentialgleichung zu Grunde gelegt haben), in dem eine nach unten gerichtete Bewegung ein negatives Vorzeichen erhält.
Als Herausforderung, die ich als Zusatzaufgabe ohne Computerunterstützung nur mehr den guten Schülern der Klasse zugemutet habe, kann man auch in dieser Bewegungsaufgabe noch den Zusammenhang zwischen zurückgelegtem Weg und Zeit bestimmen. $s(t)=\int_0^t v(x)\,dx$ [3]

4.3.4 Ungedämpfte Federschwingung (harmonische Schwingung)

$$m*\frac{d^2x}{dt^2}=-k\,x \text{ mit k...Federkonstante}$$

analog: $l*\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-g\,\alpha$ Schwingung des Fadenpendels für kleine Auslenkungen (l...Fadenlänge, g...Fallbeschleunigung),

bzw.: $L*\frac{d^2I}{dt^2}=-\frac{1}{C}I$ elektrischer Schwingkreis (I(t)..Stromstärke, C..Kapazität des Kondensators, L...Induktivität der Spule).
Die Lösungsfunktion findet man in diesem Fall über den Ansatz x(t)=A*sin(wt+φ). Die Konstante w kann durch das Einsetzen in die Differentialgleichung bestimmt werden. A und φ werden durch die Anfangswerte festgelegt. Der Ansatz kann aus der Tatsache motiviert werden, dass die Schüler zu diesem Zeitpunkt bereits 2 Funktionen kennen, die die geforderte Eigenschaft $\frac{d^2f}{dx^2}\sim x$ besitzen. Daraus kann man meiner Erfahrung nach zwar den Ansatz x(t)=A*sin(wt)+B*cos(wt) einfacher verständlich machen, für eine eventuell folgende physikalische Interpretation der Konstanten ist jedoch die 1. Lösungsvariante zu bevorzugen.

4.3.5 Schwingung unter Dämpfungseinfluss :

Zur Analyse der 3 Lösungsfälle wird für den Schwingungsfall die Eulersche Formel benötigt)

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=b\frac{dx}{dt}-k\,x$$

Für die Lösung nimmt man den Exponentialansatz, den man bereits bei 4.3.4 verwenden hätte können. Aus dem Ansatz $x(t)=Ae^{kx}$ erhält man eine quadratische Gleichung zur Bestimmung der Konstante k. Im Falle einer reellen Lösung dieser Gleichung (starke Dämpfung) entsteht in der Bewegung keine Schwingung. Von technischem Interesse ist der aperiodische Grenzfall (reelle Doppellösung), da hier das System am schnellsten wieder in seine Ruhelage zurückkehrt.
Im Falle komplexer Lösungen des Systems kann man entweder über die Eulersche Gleichung zeigen, das eine gedämpfte Schwingung entsteht, oder mit dem Ansatz $x(t)=Ae^{-rt}\sin(wt+\varphi)$ die Differentialgleichung nochmals behandeln. Diese 2. Variante könnte man wählen, wenn den Schülern die Eulersche Gleichung nicht bekannt ist.

4.3.6 Lösungsvariante einer Schülergruppe für den Fallschirmsprung:

Die nachfolgende Ausarbeitung ist ein Derive-Arbeitsblatt einer Schülergruppe (2 Schüler). Die Aufgabenstellung wurde in Gruppenarbeit im EDV-Raum gelöst, nachdem dieser Differentialgleichungstyp bereits ohne Computer behandelt wurde. Den Schülern wurden keine Daten für c_W-Werte, Massen, Dichte oder Querschnittsflächen vorgegeben. Die Projektdauer betrug 3 Unterrichtseinheiten, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Schüler zwar manchmal

[3] Siehe Anhang

mit Derive gearbeitet hatten, es aber durch den teilweise großen zeitlichen Abstand dieser Computereinheiten zu einigen Problemen im Handling mit der Software kam.
Die Funktion DSOLVE1 von Derive zum Lösen von Differentialgleichungen 1. Ordnung wird in diesem Fall als Black-Box[4] verwendet. Die White-Box-Phase bestand im vorangehenden Lösen dieses Differentialgleichungstyps (siehe 4.3.3) ohne Computereinsatz.

Fallschirmsprung aus 2000m Höhe, Öffnen des Fallschirms in 500m Höhe

gesucht: t und v unmittelbar vor dem Öffnen des Fallschirms
t und v bei der Landung.

Differentialgleichung berücksichtigt Luftwiderstand sowie Gravitation:

Werte: Fallschirm: A = 14,85m^2; cw = 1,3
Körper: A = 0,5m^2; cw = 1
g = 9,81m/s^2; ρ = 1,2; m = 90 (80 + 10)

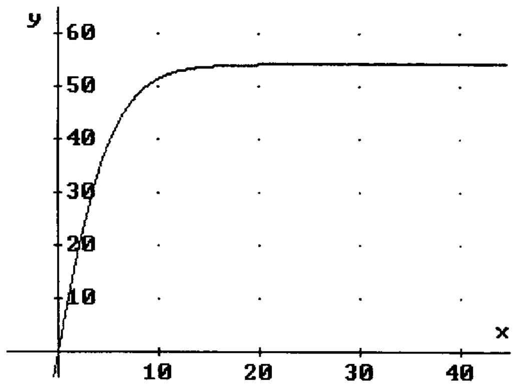
Lösen der Differentialgleichung:

#1: $$\mathrm{DSOLVE1}\left(\frac{1\cdot 1.2\cdot 0.5}{2}\cdot v^2 - 90\cdot 9.81,\ 90,\ t,\ v,\ 0,\ 0\right)$$

#2: $$50\cdot \mathrm{LN}\left(\frac{v - 3\cdot\sqrt{327}}{v + 3\cdot\sqrt{327}}\right) + \sqrt{327}\cdot t = 50\cdot\pi\cdot\hat{\imath}$$

Auflösen der Gleichung nach v:

#3: $$v = \frac{3\cdot\sqrt{327}\cdot(\hat{e}^{\sqrt{327}\cdot t/50} - 1)}{\hat{e}^{\sqrt{327}\cdot t/50} + 1}$$



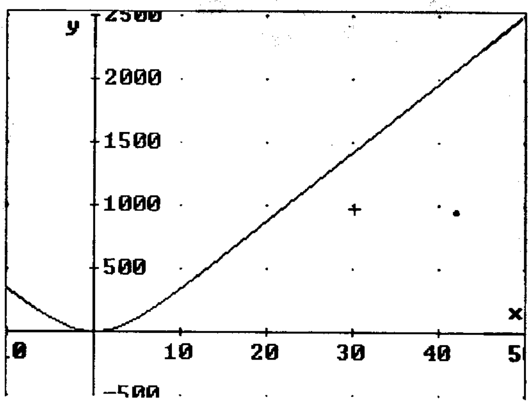
Berechnen von s(t) als Stammfunktion von v(t):

#4: $$\int^{t} \frac{3\cdot\sqrt{327}\cdot(\hat{e}^{\sqrt{327}\cdot t/50} - 1)}{\sqrt{327}\cdot t/50}\,dt$$

[4] B. Buchberger: „WhiteBox – BlackBox – Prinzip"

$$\int_0 \quad \hat{e} \quad + 1$$

#5: $$s = 300 \cdot LN\left(\frac{\hat{e}^{\sqrt{327} \cdot t/50}}{2} + \frac{1}{2}\right) - 3 \cdot \sqrt{327} \cdot t$$



Einsetzen für s = 1500 (entspricht 500m Höhe):

#6: $$1500 = 300 \cdot LN\left(\frac{\hat{e}^{\sqrt{327} \cdot t/50}}{2} + \frac{1}{2}\right) - 3 \cdot \sqrt{327} \cdot t$$

Berechnen von t in 500m Höhe:

#7: $$t = 31.48311306$$

Berechneten Wert für t in v(t) (#4) einsetzen:

#8: $$v = 54.24819248$$

Der Fallschirm wird nach 31,5s bei einer Geschwindigkeit von 54,2m/s (195km/h) geöffnet.

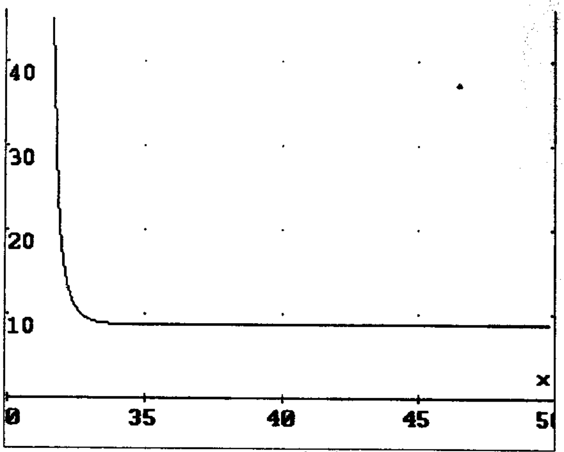
Lösen der Differentialgleichung mit Werten für geöffneten Fallschirm und berechneten Anfangsbedingungen:

#9: $$DSOLVE1\left(\frac{1.3 \cdot 1.2 \cdot 14.85}{2} \cdot v^2 - 90 \cdot 9.81,\ 90,\ t,\ v,\ 31.48311306,\ 54.24819248\right)$$

#10: $$1.369986317 \cdot 10^{20} \cdot LN\left(\frac{2.06855 \cdot 10^5 \cdot v - 1.805973 \cdot 10^6}{2.06855 \cdot 10^5 \cdot v + 1.805973 \cdot 10^6}\right) + 7.825883 \cdot 10^6 \cdot (3.934020799 \cdot 10^{13} \cdot t - 1.23286807 \cdot 10^{15}) = 0$$

Auflösen der Gleichung nach v:

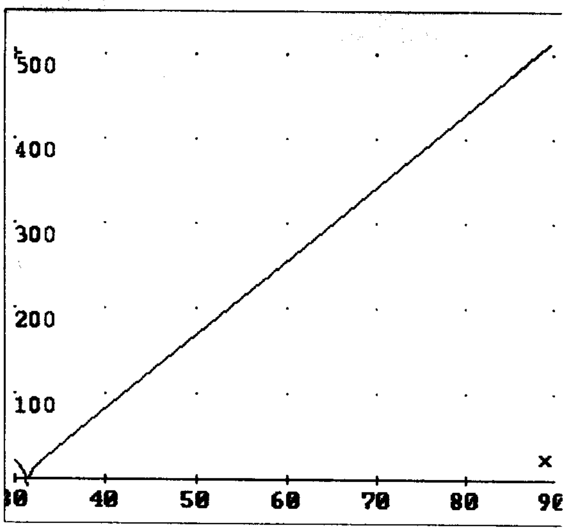
#11: $$v = \frac{8.73\cdot(\hat{e}^{2.24\cdot t} + 3.85\cdot 10^{30})}{\hat{e}^{2.24\cdot t} - 3.85\cdot 10^{30}}$$



Berechnen von s(t) als Stammfunktion von v(t):

#12: $$\int_{31.48311306}^{t} \frac{8.730612244\cdot(\hat{e}^{2.247252747\cdot t} + 3.851598745\cdot 10^{30})}{\hat{e}^{2.247252747\cdot t} - 3.851598745\cdot 10^{30}}\, dt$$

#13: $$s = 7.77\cdot \mathrm{LN}(6.4\cdot 10^{-33}\cdot(106\cdot\hat{e}^{2.24\cdot t} - 4.08\cdot 10^{32})\cdot \mathrm{SIGN}(\hat{e}^{2.24\cdot t} - 3.85\cdot 10^{30})) + 8.73\cdot t + 274.8$$



Einsetzen für s = 500m (entspricht 0m Höhe):

#14: $$500 = 7.77\cdot \mathrm{LN}(6.4\cdot 10^{-33}\cdot(106\cdot\hat{e}^{2.24\cdot t} - 4.08\cdot 10^{32})\cdot \mathrm{SIGN}(\hat{e}^{2.24\cdot t} -$$

```
        30
3.85•10   )) - 8.73•t + 274.8
```

Berechnen von t in 500m Höhe:

#15: $t = 87.60759793$

Berechneten Wert für t in v(t) (#12) einsetzen:

#16: $v = 8.730612244$

Die Landung erfolgt nach 87,6s mit einer Geschwindigkeit von 8,7m/s (31,4km/h).

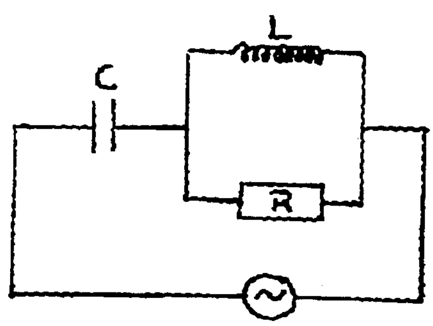
4.4 Komplexe Zahlen – Wechselstromwiderstände

Betrachtet man einen Wechselstromkreis, indem außer herkömmlichen (ohmschen) Widerständen auch Kondensatoren (Kapazitäten) und Spulen (Induktivitäten) vorhanden sind, so kommt es zu einer Phasenverschiebung zwischen dem Verlauf der Stromstärke und der Spannung. (d.h. die beiden Funktionen erreichen nicht mehr gleichzeitig ihr Maximum).
In weiterer Folge werden für die physikalischen Größen folgende Symbole verwendet:

U	Spannung
I	Stromstärke
R	(ohmscher) Widerstand
C	Kapazität (des Kondensators)
L	Induktivität (der Spule)
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
f	Frequenz (des Stromes)

Um die aus dem Gleichstrombereich bekannten Gesetze wie OHM'sches Gesetz (U=R*I) und die Kirschhoffschen Regeln[5] weiterverwenden zu können, erweist es sich als zweckmäßig Widerstände mit komplexen Werten zu versehen, wobei der Betrag der komplexen Zahl dem tatsächlichen Widerstand einer Schaltung und das Argument der Zahl der Phasenverschiebung zwischen Spannungsverlauf und Stromstärkenverlauf entspricht.
Aus der Unterstufenphysik kennen die Schüler noch Regeln (die sich aus dem Ohmschen Gesetz und den Kirchhoffschen Regeln ableiten lassen) zur Bestimmung des Widerstandes bei Hintereinanderschaltung ($R_{Ges}=R_1+R_2$) und bei Parallelschaltung ($\frac{1}{R_{Ges}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$). Durch die Verwendung komplexer Zahlen können diese Regeln nun auch im Wechselstrombereich verwendet werden.
Das folgende Beispiel (entnommen aus einer Schularbeitsangabe) soll die Anforderungen solcher Aufgaben kurz verdeutlichen:

Berechne den Gesamtwiderstand und die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Stromstärke folgender Schaltung:



[5] siehe etwa Basiswissen 3 (Literaturliste)

ω = 200s^{-1}
C = 5*10^{-5}F
L = 5*10^{-2}H
R = 100Ω

Lösungsskizze:

Kapazitiver Widerstand (Kondensator): $R_C = -\frac{i}{wC} = -\frac{i}{200*5*10^{-5}} = -100i$

Induktiver Widerstand (Spule): $R_L = iwL = i*200*5*10^{-2} = 10i$

Der Widerstand der Parallelschaltung ergibt sich aus: $\frac{1}{R_{II}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_L} = \frac{1}{100} + \frac{1}{10i}$

zu $R_{II} = \frac{100+1000i}{101}$. Für den komplexwertigen Gesamtwiderstand Z der Schaltung ergibt sich:

$$Z = R_C + R_{II} = -100i + \frac{100+1000i}{101} = \frac{100}{101} - \frac{9100}{101}i$$

Das Umrechnen in die Polarform (bestimmen von Betrag und Argument):

$$|Z| \approx 90{,}1\Omega \quad und \quad \varphi \approx -89{,}4°$$

liefert nun die physikalisch relevanten Größen Widerstand und Phasenverschiebung der Schaltung.
Neben einer Bestimmung des Widerstandes Z für eine bestimmte Wechselstromfrequenz f (w=2πf) kann Z auch als Funktion der Frequenz betrachtet werden. Die Frage nach dem kleinstmöglichen Wert für |Z| bietet neben dem Rechnen mit komplexen Zahlen noch eine Anwendung der Differentialrechnung.[6]

4.5 Schaltalgebra – Laborübungen (Schaltungen)

Im Rahmen der Bool'schen Algebra bieten die Laborübungen aus Physik die Möglichkeit, nach der Behandlung der Grundlagen sich an die Konstruktion von Schaltungen zu wagen, die eine bestimmte Aufgabe erfüllen sollen. Als Anwendungsbeispiel habe ich zunächst den Halbaddierer gewählt. Über die Normalform und nachfolgende Vereinfachung wurde eine Schaltfunktion entwickelt, die die Schüler in Physik auch in die Praxis umgesetzt haben. An der Funktionsweise dieser Schaltung erkennt man die Notwendigkeit neben den beiden Zahlen auch noch den Übertragswert einer eventuellen Vorstelle mitzuberücksichtigen. Der daraus resultierende Volladdierer wurde ebenfalls für die Teile Summe(e1,e2, ü) und Übertrag(e1, e2, ü) in Funktionen entwickelt und gebaut.
Als Abschluss des Projektes wurde dieser Volladdierer als Black-Box (fertiger Baustein) verwendet, um aus 8 solcher Bausteine ein 8-Bit Addierwerk zu erstellen.

5 Ergebnisse der Schülerbefragung:

Gegen Ende des 4 jährigen Unterrichtsversuches wurde eine Schülerbefragung durchgeführt. Neben einem Fragebogen der von den Schülern anonym ausgefüllt wurde, beruhen die gewonnenen Informationen hauptsächlich auf formlosen Rückmeldebögen. Aufgrund des geringen Stichprobenumfanges erschien eine statistische Auswertung der Ergebnisse nicht sinnvoll. Trotzdem sind einige Tendenzen erkennbar, die im Folgenden kurz beschrieben werden sollen:

ZITATE:

a) "Übermotivation des Lehrers bei Aufgabenstellung während Schularbeiten" - Schularbeitsbeispiele im Vergleich zu HÜ zu schwer.

---

[6] siehe Anhang: Maturaaufgabe

b) „(Guter Schüler) Hausübungen sind lästig. Üben von bereits Bekanntem. Vermutung: "Ohne Zwang größere Bereitschaft zum Üben vorhanden"

c) „Verknüpfung Mathematik - Physik im Unterricht entspricht nicht dem Interesse der Schüler"

d) „... Allerdings frage ich mich manchmal, ob man das, was man in der Schule macht wirklich jemals brauchen kann."

e) „Zusatzbeispiel bei Schularbeiten wird positiv bewertet - jedoch ist oft zu wenig Zeit, da Schularbeiten zu lange sind"

f) „Bei Fragen an die Klasse schwächere Schüler bevorzugen"

g) „Ich würde mir wünschen, dass ähnliche Beispiele zur Schularbeit kommen, wie die die wir in der Schule gerechnet haben"

h) „Anwendungsaufgaben zeigen den Verwendungszweck von mathematischen Inhalten"

Es zeigt sich, dass nicht alle Schüler die Begeisterung des Lehrers für anwendungsorientierte Mathematik teilen. Die Schwerpunktsetzung erscheint aber angesichts der grundsätzlichen Ausrichtung des Schultyps trotzdem sinnvoll. Die Erwartung, dass alle Schüler aufgrund von physikalisch orientierten Anwendungsaufgaben zu begeisterten Mathematikbefürwortern werden ist unrealistisch.
Das letzte Zitat zeigt jedoch, dass einigen Schülern die Anwendbarkeit von mathematischen Ideen auf die Realität bewusster wurde. Aus weiteren Gesprächen mit meinen Schülern hat sich gezeigt, dass durch einen guten Mix aus innermathematischen Problemstellungen, physikalischen Aufgaben, wirtschaftsmathematischen Aufgabenstellungen und Problemstellungen aus anderen Naturwissenschaften (z.B: Wachstumsmodelle) im Schnitt ein größeres Interesse an der Mathematik hervorgerufen wird. Das Zitat d.) lässt jedoch vermuten, dass trotz größter Anstrengungen nicht alle Schüler vom Sinn der Schule (und damit auch der Mathematik) überzeugt werden.
Das Zitat g) bedarf allerdings noch einer weiteren Erklärung meinerseits. Da die Rückmeldungen anonym erfolgten, ist eine eindeutige Zuordnung dieser Aussage zu einer bestimmten Person nicht möglich. Meine Interpretation dieser Aussage besteht darin, dass ich, vor allem durch die erstmalige Durchführung, die Schwierigkeiten der Schüler teilweise falsch eingeschätzt habe, aber hier auch ein grundlegendes Problem des anwendungsorientierten Unterrichtes besteht. In der Anwendungssituation und das bestätigen auch die Ergebnisse der CAS-Studien, ist ein höheres Maß an Verständnis erforderlich, was gerade bei schwächeren Schülern noch mehr Probleme verursacht. Ich habe aber während der 4 Jahre beobachtet, dass die Schwierigkeiten der Schüler mit solchen Aufgaben geringer wurden, also ein gewisser Lerneffekt beobachtbar war.
Die Rückmeldungen der Schüler ermöglichten mir einige (auch selbstkritische) Reflexionen über den eigenen Unterricht. Ich war natürlich erfreut über positive Beurteilungen meines Unterrichtsstiles, musste in einigen Punkten meinen Schülern in ihrer Kritik Recht geben (z.B. zu starke Orientierung an den guten Schülern) und konnte auch feststellen, dass trotz intensiver Bemühungen nicht alle Schüler die Ideen erkannten, die ich eigentlich vermitteln wollte.

6 Literatur:

Altrichter, Herbert: „Lehrer erforschen ihren Unterricht"
Klinkhardt, Bad Heilbrunn/Obb., 1990

Altrichter, Herbert: „Schule Gestalten"

Lehrer als Forscher
Hermagoras, Klagenfurt, 1989

Buchberger, Bruno: „The White Box / Black Box Principle"

Bürger-Fischer: „MATHEMATIK – OBERSTUFE 1-4"
Öbv et hpt

Heymann, Werner: „Allgemeinbildung und Mathematik"
Beltz, 1996

Jaros-Nussbaumer-Kunze: „Basiswissen 1-4"
Physik compact
Öbv et hpt

Mende/Simon: „Physik – Gleichungen und Tabellen"
VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1981

Reichel – Müller - Laub: „Lehrbuch der Mathematik"
Öbv et hpt

Sexl-Raab-Streeruwitz: „PHYSIK 1-4"
Öbv et hpt

7 Anhang:

- Berechnung des Integrals $s(t)=\int_0^t \frac{10(1-e^{200x})}{1+e^{200x}}dx$:

Die Substitution $u=e^{200x}$ mit $dx=\frac{1}{200u}du$ liefert: $\int\frac{(1-u)}{1+u}\frac{1}{200u}du$. Vereinfachung und Partialbruchzerlegung ergeben: $\frac{1}{20}(\int\frac{1}{u}du-2\int\frac{1}{u+1}du)$. Durch Integration, Rücksubstitution und Einsetzen der Grenzen erhalten wir schließlich das gesuchte Ergebnis für s(t):

$$s(t)=10t-\frac{1}{10}\ln(1+e^{200t})+\frac{\ln(2)}{10}$$

- Maturaaufgabe

In einem Wechselstromkreis kann das Verhalten einer Schaltung einfacher durch die Verwendung von komplexen Zahlen beschrieben werden. Der ohmsche Widerstand wird durch die reelle Zahl $Z_R = R$ beschrieben, der Widerstand einer Spule ist gegeben durch $Z_L = i2\pi fL$ und der eines Kondensators durch den Wert $Z_C = -i/(2\pi fC)$, wobei f die Frequenz des Stromes, L die Induktivität der Spule und C die Kapazität des Kondensators ist. Bei Hintereinanderschaltung von Bauteilen entspricht dem Gesamtwiderstand die Summe der Einzelwiderstände ($Z = Z_R + Z_L + Z_C$). Der tatsächlich zu messende Widerstand entspricht dem Betrag der komplexen Zahl Z, während das Argument dieser Zahl der Phasenverschiebung zwischen Strom- und Spannungsverlauf entspricht.

a.) Berechne für eine Hintereinanderschaltung eines ohmschen Widerstandes (R=10Ω), einer Spule (L=0,25H) und eines Kondensators (C=0,01F) den Gesamtwiderstand (R(f)=|Z|) sowie die Phasenverschiebung für einen Wechselstrom mit einer Frequenz von 5 Hz.

b.) Bestimme die Abhängigkeit des Gesamtwiderstandes von der Frequenz des angelegten Stroms (R(f)=|Z|). Diese Funktion ist im Bereich f ∈]0Hz ; 10Hz] graphisch darzustellen.

c.) Bestimme das Verhalten der Funktion im Bereich niedriger Frequenzen (f -> 0 (Gleichstrom)) sowie im Bereich hoher Frequenzen. (f -> ∞) mittels Grenzwert.

d.) Bestimme die lokale Extremstelle der Funktion (=RESONANZFREQUENZ) durch Verwendung der Differentialrechnung.